ステップ 演習 ▶複素数の相等・四則演算（講義編 p.20, 21 参照）

(1)　次の式を満たす実数 x、y を求めよ。

$$(2+i)x+(1-i)y=5+4i$$

(2)　次の計算をして、実部と虚部を求めよ。

(a)　$(1-3i)i-(-2+5i)$　　　(b)　$\dfrac{-1+\sqrt{2}\,i}{\sqrt{2}+i}$

(3)　$z+\dfrac{2}{z}$ が実数となるような z を複素数平面上に図示せよ。

ジャンプ

確認 ▶複素数の相等　四則演算

(1)　次の式を満たす有理数 x 、y、z を求めよ。

$$(1+i)x+(1+\sqrt{2}\,i)y+(\sqrt{2}+1)iz=3+(4\sqrt{2}+5)i$$

(2)　次の計算をして、実部と虚部に分けた形で答えよ。

(a)　$(i-\sqrt{2})\sqrt{3}\,i-2\sqrt{6}\,i+3\sqrt{3}$　　(b)　$\dfrac{1-\sqrt{2}}{(1+i)+\sqrt{2}\,i}$

(3)　$z^2+\dfrac{2}{z^2}$ が実数となるような z を複素数平面上に図示せよ。

ステップ

演習 ▶ド・モアブルの定理、方程式 $z^n=\alpha$(講義編 p.35 参照)

(1) $(2-2i)^{10}$ を計算せよ。

(2) $\left(\dfrac{1+\sqrt{2}+i}{1+\sqrt{2}-i}\right)^{50}$ を計算せよ。

(3) $z^3=-4\sqrt{2}-4\sqrt{2}\,i$ を満たす z を求めよ。

ジャンプ

確認 ▶ド・モアブルの定理、方程式 $z^n=\alpha$

(1) $(-\sqrt{3}+3i)^{18}$ を計算せよ。

(2) $\left(\dfrac{2+\sqrt{3}+i}{2+\sqrt{3}-i}\right)^{50}$ を計算せよ。

(3) $z^6=\sqrt{3}+i$ を満たす z を求めよ。

ステップ

演習 ▶直線・円（講義編 p.44, 47, 60, 63 参照）

次の方程式を満たす z を複素数平面上に図示せよ。

(1)　$(-1+2i)z+(-1-2i)\overline{z}-4=0$

(2)　$z\overline{z}+(-1+2i)z+(-1-2i)\overline{z}-4=0$

(3)　$|z+2|=|z-i|$

(4)　$2|z+3i|=|z|$

ジャンプ

確認 ▶直線・円

複素数平面上で次の方程式が表す図形を求めよ。

(1)　$(3+2i)z+(3-2i)\overline{z}+7=0$

(2)　$z\overline{z}+(3+i)z+(3-i)\overline{z}-5=0$

(3)　$|z+3-i|=|z-1+5i|$

(4)　$2|z-3+5i|=|z+3-i|$

ステップ 演習 ▶1 次分数変換による像（講義編 p.70 参照）

単位円 $|z|=1$ を 1 次分数変換 $w=\dfrac{2z-1}{z+i}$ によって移した図形を求めよ。

ジャンプ

確認 ▶1次分数変換による像

直線 $(1+i)z+(1-i)\overline{z}-4=0$ を1次分数変換 $w=\dfrac{-z+4i}{iz+2}$ で移した図形を求めよ。

ステップ

演習 ▶1 次分数変換（講義編 p.72, 75 参照）

(1)　2 を 0 に、i を 1 に、-1 を ∞ に移す 1 次分数変換を求めよ。

(2)　上半平面を単位円板に移す 1 次分数変換で、$2i$ を 0 に、1 を i に移すものを求めよ。

(3)　単位円板を単位円板に移す 1 次分数変換で、$\dfrac{1}{2}i$ を 0 に、1 を i に移すものを求めよ。

確認 ▶1次分数変換

(1)　2 を 1 に、i を $-i$ に、-1 を $-2i$ に移す1次分数変換を求めよ。

(2)　$|z|=1$ を $|w+1|=1$ に、-1 を $-1+i$ に、$2i$ を -1 に移す1次分数変換を求めよ。

ステップ 演習 ▶平面幾何への応用（講義編 p.76 参照）

(1)　△ABC の外側に正方形 AFEB、正方形 ACGH がある。FH の中点を P、正方形 AFEB の中心を Q、BC の中点を R、正方形 ACGH の中心を S とするとき、四角形 PQRS は正方形であることを示せ。

(2)　半径 1 の円に内接する正七角形 ABCDEFG について、各線分の長さの積 AB・AC・AD・AE・AF・AG を求めよ。

ジャンプ 確認 ▶平面幾何への応用

四角形 ABCD の外側に正三角形 PAB、正三角形 QBC、正三角形 RCD、正三角形 SDA がある。四角形 PQRS が正方形のとき、四角形 ABCD も正方形になることを示せ。

ステップ 演習 ▶指数関数・三角関数（講義編 p.100 参照）

次の値を求めよ。

(1) $e^{-\frac{\pi}{6}i}$ (2) $\cos(-i)$ (3) $\sin\left(\frac{\pi}{3}-2i\right)$ (4) $\tan(-i)$

ジャンプ

確 認 ▶指数関数・三角関数

次の値を求めよ。

(1) $e^{1+\frac{\pi}{2}i}$　(2) $\cos\left(-\dfrac{\pi}{3}-2i\right)$　(3) $\sin\left(\dfrac{7\pi}{6}+i\right)$

(4) $\tan\left(\dfrac{3\pi}{2}+2i\right)$

演習 ▶対数関数、複素数の複素数乗（講義編 p.106, 109, 113 参照）

次の計算をせよ。

(1)　$\log(-1+\sqrt{3}\,i)$

(2)　$(-1+i)^{2+i}$

(3)　$(-1)^{-i}$

ジャンプ

確 認 ▶対数関数、複素数の複素数乗

次の計算をせよ。

(1)　$\log(-3-3i)$

(2)　$(1-\sqrt{3}\,i)^{\sqrt{2}+2i}$

(3)　$(-i)^{-i}$

ステップ

演習 ▶コーシー・リーマンの関係式(講義編 p.136 参照)

(1)　$z=x+yi$ に対して、$f(z)=\cos x\cosh y-i\sin x\sinh y$ で表される関数が複素数平面全体で正則であることを示せ。

(2)　$z=x+yi$ に対して、$f(z)=u(x,\ y)+iv(x,\ y)$とおく。

$u(x,\ y)=\dfrac{x}{x^2+y^2}$となる、原点以外で正則な関数$f(z)$を求めよ。

ジャンプ

確 認 ▶ コーシー・リーマンの関係式

(1)　$z=x+yi$ に対して、$f(z)=\sin x \cosh y+i \cos x \sinh y$ で表される関数が複素数平面全体で正則であることを示せ。

(2)　$z=x+yi$ に対して、$f(z)=u(x,\ y)+iv(x,\ y)$ とおく。
$u(x,\ y)=\log(x^2+y^2)$ となる、$\mathrm{Re}\,z>0$ で正則な関数 $f(z)$ を求めよ。

ステップ

演習 ▶原始関数による線積分・線積分の評価（講義編 p.156, 175 参照）

（1） 次の線積分を求めよ。

（a） $\displaystyle\int_{-i}^{i}(z+1)^2dz$ （b） $\displaystyle\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{3}{4}}e^{i\pi z}dz$ （c） $\displaystyle\int_{-1}^{\frac{1}{2}}\cos(2iz)dz$

（d） $\displaystyle\int_{-1}^{2}\sin(-iz)dz$

（2） 次の不等式を示せ。

$$\left|\oint_C \frac{1}{z^2+1}dz\right| \leqq \frac{4\pi}{3} \qquad C: 2e^{i\theta} \quad (0 \leqq \theta \leqq 2\pi)$$

ジャンプ

確 認 ▶原始関数による線積分・線積分の評価

(1)　次の積分を求めよ。

(a)　$\displaystyle\int_{-1}^{1}(z+i)^9dz$　　(b)　$\displaystyle\int_{0}^{\frac{3}{4}}e^{(1+i)\pi z}dz$　　(c)　$\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{3}i}\sin^2((-1+i)z)dz$

(2)　C：$|z|=R$、$-\dfrac{\pi}{2}\leqq\arg z\leqq\dfrac{\pi}{2}$、$R>1$ のとき、次の不等式を示せ。

$$\left|\int_C\frac{\mathrm{Log}z}{z^2}dz\right|\leqq\frac{\pi}{R}\left(\log R+\frac{\pi}{2}\right)$$

ステップ

演習 ▶積分経路に沿って線積分(講義編 p.158, 161 参照)

始点 0 と終点 $1+i$ を結ぶ曲線 C_1、C_2 がある。

$C_1 : z=t+ti \quad (0 \leqq t \leqq 1)$　　　$C_2 : z=t^2+ti \quad (0 \leqq t \leqq 1)$

このとき次の線積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int_{C_1} |z|^2 dz$　　　(2) $\displaystyle\int_{C_2} |z|^2 dz$

ジャンプ

確 認 ▶積分経路に沿って線積分

始点 1 と終点 i を結ぶ曲線 C_1、C_2 がある。

$$C_1 : z=1-t+ti \quad (0 \leqq t \leqq 1) \qquad C_2 : z=e^{i\theta} \quad \left(0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2}\right)$$

このとき次の線積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int_{C_1} \bar{z}dz$ (2) $\displaystyle\int_{C_2} \bar{z}dz$

ステップ

演習 ▶コーシーの積分公式の実関数の定積分への応用(講義編 p.179 参照)

$f(z)=e^{-z^2}$ を、a、$a+bi$、$-a+bi$、$-a$ を結んだ長方形の周で積分することによって次の等式を示せ。ただし、b は任意の実数。

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\cos(2bx)\,dx=\sqrt{\pi}\,e^{-b^2}$$

ジャンプ

確認 ▶コーシーの積分定理の実関数の定積分への応用

$f(z)=\dfrac{1}{1+z^2}$を、a、$a+bi$、$-a+bi$、$-a$を結んだ長方形の周で積分することによって次の等式を示せ。ただし、$0<b<1$。

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1-b^2+x^2}{(1-b^2+x^2)^2+4x^2b^2}\,dx=\pi$$

ステップ **演 習** ▶コーシーの積分公式の実関数の定積分への応用(講義編 p.179 参照)

$f(z)=e^{-z^2}$ を、0、a、$a+bi$、bi を結んだ長方形の周で積分することで次の等式を示せ。

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2}\sin(2bx)\,dx=e^{-b^2}\int_0^{b} e^{x^2}\,dx$$

ジャンプ

確 認 ▶コーシーの積分定理の実関数の定積分への応用

$f(z)=e^{-z^2}$ を、$0\leqq|z|\leqq R$、$0\leqq \arg z\leqq\dfrac{\pi}{8}$ の境界線に沿って周回積分することで次の等式を示せ。

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2}\cos(x^2)\,dx=\frac{\sqrt{\pi}}{4}\sqrt{\sqrt{2}+1} \qquad \int_0^{\infty} e^{-x^2}\sin(x^2)\,dx=\frac{\sqrt{\pi}}{4}\sqrt{\sqrt{2}-1}$$

ステップ

演習 ▶ローラン展開（講義編 p.234 参照）

次の関数を $z=0$ を中心にローラン展開せよ。

(1) $\dfrac{\cos z}{z^2}$　　(2) $\dfrac{\sinh z}{z^3}$　　(3) $\dfrac{e^z}{z^3}$

ジャンプ

確認 ▶ローラン展開

次の関数を z を中心にローラン展開せよ。

(1) $\dfrac{\cosh z}{z^2}$　　(2) $\dfrac{\mathrm{Log}(1+z)}{z^2}$　　(3) $e^{\frac{i}{z}}$

ステップ

演習 ▶ローラン展開（講義編 p.237 参照）

(1) $f(z)=\dfrac{z-2}{z(z-1)}$ を $z=1$ を中心にローラン展開せよ。

(2) $f(z)=\dfrac{1}{z^2}$ を $z=-1$ を中心にローラン展開せよ。

ジャンプ

確認 ▶ローラン展開

$f(z)=\dfrac{1}{z(z-i)}$ を $z=1$ を中心にローラン展開せよ。

ステップ

演習 ▶留数定理（講義編 p.253 参照）

次の周回積分を計算せよ。ただし、向きは反時計回りに取るものとする。

$$\oint_C \frac{\sin z}{z^2(z^2+1)}dz \qquad C: |z+1+i| = \sqrt{3}$$

ジャンプ 確認 ▶留数定理

次の周回積分を計算せよ。ただし、向きは反時計回りに取るものとする。

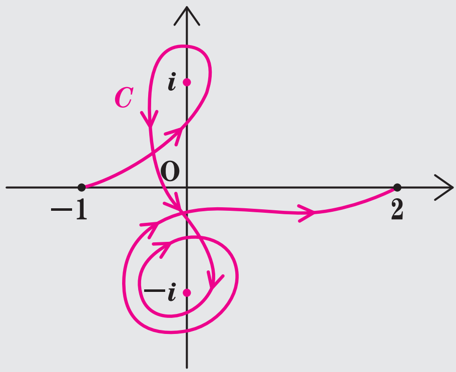
$$\oint_C \frac{\cos(\pi z)}{z(z-1)^3(z+1)}dz \qquad C:|z-1+i|=2$$

ステップ

演習 ▶留数定理（経路の工夫）（講義編 p.255 参照）

図のような経路に沿って次の線積分を求めよ。

$$\int_C \frac{z}{z^2+1}dz$$

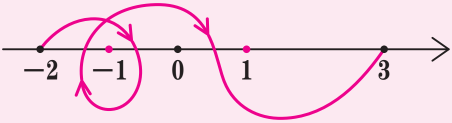


ジャンプ

確認 ▶留数定理（経路の工夫）

図のような経路に沿って次の線積分を求めよ。

$$\int_C \frac{z}{z^2-1}dz$$



ステップ

演習 ▶有理関数の定積分（講義編 p.257 参照）

次の等式を示せ。

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{x^4+1}dx=\frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

ジャンプ

確認 ▶有理関数の定積分

次の等式を示せ。

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^6+1} dx = \frac{2\pi}{3}$$

ステップ

演習 ▶(有理関数 × 三角関数)の定積分 (講義編 p.260 参照)

$a>0$、$b>0$ のとき、次の等式を示せ。

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(ax)}{x^2+b^2}dx=\frac{\pi}{b}e^{-ab}$$

ジャンプ 確認 ▶(有理関数 × 三角関数)の定積分

$a>0$、$b>0$ のとき、次の等式を示せ。

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^3\sin(ax)}{(x^2+b^2)^2}dx=\pi e^{-ab}\left(1-\frac{ab}{2}\right)$$

ステップ

演 習 ▶（三角関数の有理関数）の定積分（講義編 p.270 参照）

$a>0$ のとき、次の等式を示せ。

(1) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{a+\sin^2\theta}d\theta=\frac{\pi}{2\sqrt{a^2+a}}$ $(a>0)$

(2) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{(a+\sin^2\theta)^2}d\theta=\frac{\pi(2a+1)}{4\sqrt{(a^2+a)^3}}$ $(a>0)$

ジャンプ

確 認 ▶（三角関数の有理関数）の定積分

$b>a>0$ のとき、次の等式を示せ。

(1) $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{1}{a^2\cos^2\theta+b^2\sin^2\theta}d\theta=\frac{2\pi}{ab}$

(2) $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{1}{(a^2\cos^2\theta+b^2\sin^2\theta)^2}d\theta=\frac{\pi(a^2+b^2)}{a^3b^3}$

ステップ

演習 ▶実軸上に極を持つ実関数の定積分(講義編 p.264 参照)

$a>0$、$b>0$ が実数のとき、次の定積分に関する等式を示せ。

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos(ax)-\cos(bx)}{x^2}dx=\frac{b-a}{2}\pi$$

ジャンプ

確認 ▶実軸上に極を持つ実関数の定積分

$b>0$ のとき、次の定積分に関する等式を示せ。

$$\int_0^{\infty}\frac{\sin x}{x(x^2+b^2)}dx=\frac{\pi}{2b^2}(1-e^{-b})$$

ステップ 演習 ▶実軸上に極を持つ実関数の定積分（講義編 p.264 参照）

次の定積分に関する等式を示せ。

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx = \frac{\pi}{2}$$

ジャンプ

確認 ▶実軸上に極を持つ実関数の定積分

次の定積分に関する等式を示せ。

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(\pi x)}{4x^2-1} dx = -\frac{\pi}{2}$$

ステップ

演習 ▶対数関数の入った定積分（講義編 p.273 参照）

次の定積分に関する等式を示せ。

$$\int_0^{\infty}\frac{\log x}{(x^2+a^2)^2}dx=\frac{\pi}{4a^3}(\log a-1)\quad (a>0)$$

ジャンプ

確認 ▶対数関数の入った積分への応用

$-1<\alpha<0$、$0<b$ に対して、次の等式を示せ。

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{\alpha}\log x}{x+b}dx=\frac{\pi b^{\alpha}}{\sin\pi\alpha}\left(\frac{\pi\cos\pi\alpha}{\sin\pi\alpha}-\log b\right)$$

ステップ

演 習 ▶ リーマン面上のコーシーの積分定理の応用(講義編 p.219 参照)

$-1<\alpha<1$ に対して、次の等式を示せ。

$$\int_0^\infty \frac{x^\alpha}{(x+1)(x+2)}dx=\frac{\pi(2^\alpha-1)}{\sin(\pi\alpha)}$$

ジャンプ 確認 ▶ リーマン面上のコーシーの積分定理の応用

$-1<\alpha<1$、$b>0$ に対して、次の式を示せ。

$$\int_0^{\infty}\frac{x^{\alpha}}{(x+b)^2}dx=\frac{\pi\alpha b^{\alpha-1}}{\sin(\pi\alpha)}$$