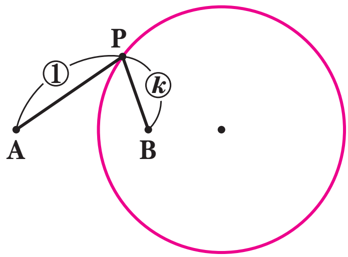
# アポロニウスの円（講義編 p.51 の補足）

アポロニウスの円について初等幾何で説明しておきます。

**定理　（アポロニウスの円）**

平面上の 2 定点 A、B に対し、PA：PB$=1$：$k(k \neq 1)$となる点 P の軌跡は円になる。




この定理を証明するには，角の二等分線の定理が必要です。

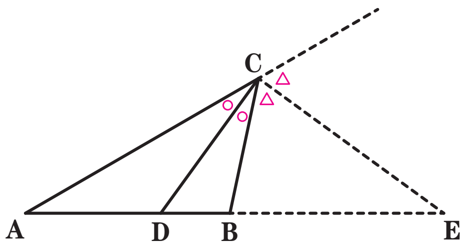
**定理　（角の二等分線の定理）**

△ABC の辺 AB 上の点 D と辺 AB の延長線上の点 E がそれぞれ、

AC：BC＝AD：BD　　AC：BC＝AE：BE

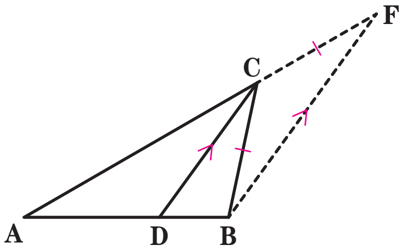
を満たすとき、CD は∠ ACB を二等分し、CE は ∠ACB の外角を二等分する。

D は AB を AC：BC に内分する点、E は AB を AC：BC に外分する点です。



CD は ∠ACB を二等分することを示してみましょう。

CB＝CF となるように AC の延長上に F を取ります。




AD：BD＝AC：CF ですから、DC∥BF です。

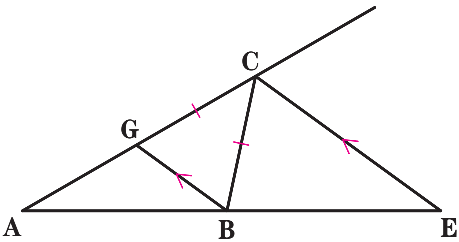
∠ACD＝∠CFB＝∠CBF＝∠BCD

DC∥BF　二等辺三角形　DC∥BF

となるので、CD は ∠ACB を二等分します。

次に、CE は ∠ACB の外角を二等分することを示してみましょう。

CB＝CG となるように辺 AC 上に G を取ります。




AE：BE＝AC：CG ですから、CE∥GB です。

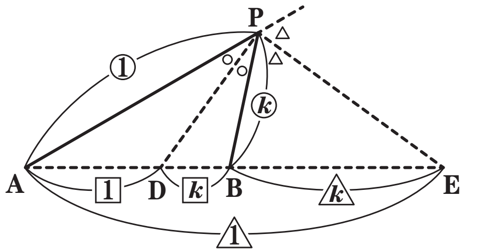
∠BCE＝∠CBG＝∠CGB＝(∠ACE の補角)

CE∥GB　二等辺三角形　CE∥GB

となるので、CE は∠ ACB の外角を二等分します。　（証明終わり）

角の二等分線の定理を用いて、アポロニウスの円の定理を示しましょう。

AB を 1：$k$ に内分する点を D、外分する点を E とします。




すると、PA：PB＝1：$k$($k\neq1$)となるPについて、角の二等分線の定理を用いて、PDは∠APBを、PEは∠APBの外角を二等分します。

○×2＋△×2＝$\pi$ですから、○＋△は直角です。

Pは2定点D、Eを直角に見込む点ですから、円周角の定理の逆により、PはDEを直径とする円上にあります。Pの軌跡が円になることが示されました。

（証明終わり）