マクローリン展開（講義編 p.93 の補足）

次の関数のマクローリン展開を求めます。

(1)　$f(x)=e^x$　　(2)　$f(x)=\cos x$

(3)　$f(x)=\sin x$　　(4)　$f(x)=\log(1+x)$

マクローリン展開

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f^{(2)}(0)}{2\,!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n\,!}x^n+\cdots$$

(1)　$f^{(n)}(x)=(e^x)^{(n)}=e^x$、$f^{(n)}(0)=e^0=1$ となります。

テイラーの定理により、$a<x<b$ を満たす x に対して、0 と x の間にうまく c を取って、

$$e^x=1+x+\frac{1}{2\,!}x^2+\frac{1}{3\,!}x^3+\frac{1}{4\,!}x^4+\cdots+\frac{e^c}{n\,!}x^n$$

$d=\max(|a|,\ |b|,\ 1)$とおくと、d より大きい整数 m, n （$m<n$） に対して、

$$\left|\frac{e^c}{n\,!}x^n\right|\leqq\frac{|e^c|}{n\,!}d^n=\frac{|e^c|d^m\cdot d^{n-m}}{1\cdot 2\cdot\cdots\cdot m\cdot(m+1)\cdot\cdots\cdot n}$$

$$\leqq\frac{|e^c|d^m\cdot d^{n-m}}{1\cdot 2\cdot\cdots\cdot m\cdot(m+1)^{n-m}}=\frac{|e^c|d^m}{1\cdot 2\cdot\cdots\cdot m}\left(\frac{d}{m+1}\right)^{n-m}$$

となり、$n\to\infty$ のとき、右辺が 0 に収束するので、剰余項 $\frac{e^c}{n!}x^n$ も 0 に収束します。

a、b は任意に取ることができますから、e^x は、

$$e^x=1+x+\frac{1}{2\,!}x^2+\frac{1}{3\,!}x^3+\frac{1}{4\,!}x^4+\cdots\cdots \qquad (-\infty<x<\infty)$$

とマクローリン展開できます。

［マクローリン展開をべき級数として見て収束半径を求めてみると］

(2)、(3)　cos、sin の微分は、

$$\cos x \xrightarrow{\text{ビブン}} -\sin x \xrightarrow{\text{ビブン}} -\cos x \xrightarrow{\text{ビブン}} \sin x \xrightarrow{\text{ビブン}} \cos x \xrightarrow{\text{ビブン}}$$

と巡回します。これより $f(x)=\cos x$ の場合は、

n が偶数のとき、$n=2k$ として、$f^{(n)}(x)=(-1)^k\cos x$, $f^{(n)}(0)=(-1)^k$

n が奇数のとき、$n=2k+1$ として、$f^{(n)}(x)=(-1)^{k+1}\sin x$, $f^{(n)}(0)=0$

テイラーの定理により、$a<x<b$ を満たす x に対して、0 と x の間にうまく c を取って、

$$\cos x=1-\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4-\frac{1}{6!}x^6+\cdots\frac{(-1)^k\cos c}{(2k)\,!}x^{2k} \quad (a<x<b)$$

$d=\max(|a|,\ |b|,\ 1)$ とおくと、d より大きい整数 m, $n=2k$ $(m<n)$ に対して、

$$\left|\frac{(-1)^k\cos c}{(2k)\,!}x^{2k}\right|\leqq\frac{|\cos c|}{n\,!}d^n=\frac{|\cos c|d^m\cdot d^{n-m}}{1\cdot 2\cdot\cdots\cdot m\cdot(m+1)\cdot\cdots\cdot n}$$

$$\leqq\frac{|\cos c|d^m\cdot d^{n-m}}{1\cdot 2\cdot\cdots\cdot m\cdot(m+1)^{n-m}}=\frac{|\cos c|d^m}{1\cdot 2\cdot\cdots\cdot m}\left(\frac{d}{m+1}\right)^{n-m}$$

となり、$n\to\infty$ のとき、右辺が 0 に収束するので、剰余項 $\dfrac{\cos c}{n\,!}x^n$ も 0 に収束します。

a、b は任意に取ることができますから、$\cos x$ は、

$$\cos x=1-\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4-\frac{1}{6!}x^6+\cdots \qquad (-\infty<x<\infty)$$

とマクローリン展開できます。

$f(x)=\sin x$ の場合も同様に、

$$\sin x=x-\frac{1}{3\,!}x^3+\frac{1}{5\,!}x^5-\frac{1}{7\,!}x^7+\cdots \qquad (-\infty<x<\infty)$$

とマクローリン展開できることがわかります。

(4) $f(x)=\log(1+x)$ の場合は、

$$f^{(n)}(x)=\frac{(-1)^{n-1}(n-1)\,!}{(1+x)^n},\quad \frac{f^{(n)}(x)}{(n-1)\,!}=\frac{(-1)^{n-1}}{(1+x)^n}$$

テイラーの定理のコーシーの剰余項 $\dfrac{f^{(n)}(c)}{(n-1)\,!}x(x-c)^{n-1}$ を用いるバージョンにより、$-1<x<1$ を満たす x に対して、0 と x の間にうまく c を取って、

$$\log(1+x)=x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3-\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{(1+c)^n}x(x-c)^{n-1}$$

と表されます。

$$\left|\frac{(-1)^{n-1}}{(1+c)^n}x(x-c)^{n-1}\right|=\left|\frac{x(x-c)^{n-1}}{(1+c)^n}\right|$$

$$=\frac{|x|^n}{1+c}\left|\frac{1-\frac{c}{x}}{1+c}\right|^{n-1}\leqq\frac{|x|^n}{1+c}\leqq\frac{|x|^n}{1-|x|}$$

$0<\dfrac{1-\frac{c}{x}}{1+c}<1$ であること

$0<x<1$ のとき、$0<c<x$ であり、$0<\dfrac{c}{x}<1$、$1<1+c$、$0<\dfrac{1-\frac{c}{x}}{1+c}<1$

$-1<x<0$ のとき、$x<c<0$ であり、$0<|c|<\dfrac{c}{x}<1$、$0<\dfrac{1-\frac{c}{x}}{1+c}=\dfrac{1-\frac{c}{x}}{1-|c|}<1$

$n\to\infty$ のとき、右辺は 0 に収束するので、剰余項も 0 に収束します。

よって、$\log(1+x)$は $-1<x<1$ で、

$$\log(1+x)=x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3-\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n+\cdots\cdots \qquad \cdots\cdots①$$

とマクローリン展開できることが分かりました。

$x=1$ のときは別途議論が必要です。

$$\frac{1-(-1)^n x^n}{1-(-x)}=1-x+x^2-x^3+\cdots+(-1)^{n-1}x^{n-1}$$

（初項 1、公比 $-x$ の等比数列）

$$\frac{1}{1+x}-(1-x+x^2-x^3+\cdots+(-1)^{n-1}x^{n-1})=\frac{(-1)^n x^n}{1+x}$$

これを 0 から 1 まで積分すると、

$$\left|\int_0^1\left(\frac{1}{1+x}-(1-x+x^2-\cdots+(-1)^{n-1}x^{n-1})\right)dx\right|$$

$$=\left|\int_0^1\frac{(-1)^n x^n}{1+x}dx\right|\leqq\int_0^1 x^n dx$$

$$\left|\log 2-\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{n}\right)\right|\leqq\frac{1}{n+1}$$

$n \to \infty$ のとき、右辺は 0 に収束するので、

$$\log 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$$

が示せ、$x=1$ のときも①が収束することが確かめられました。

マクロ―リン展開

（ア）　$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \cdots \quad (-\infty < x < \infty)$

（イ）　$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \cdots \quad (-\infty < x < \infty)$

（ウ）　$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \cdots \quad (-\infty < x < \infty)$

（エ）　$\log(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \cdots \quad (-1 < x \leqq 1)$

（オ）　$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \cdots \quad (-1 < x < 1)$

（カ）　$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \cdots \quad (-1 < x < 1)$