

# ガウス積分 (講義編 p.180、別 p.33、別 p.37 の補足)

**問題** (1) 次の重積分を無限積分で計算せよ。

$$\iint_D e^{-(x^2+y^2)} dx dy \quad D : x \geq 0, y \geq 0$$

(2)  $\int_0^\infty e^{-x^2} dx$  を求めよ。

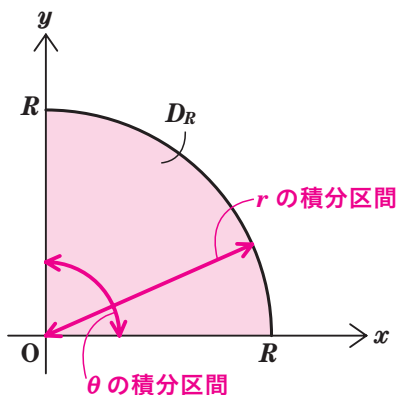
(1) 領域  $D$  は無限の領域になっています。

この問題では、

$$D_R : 0 \leq x^2 + y^2 \leq R^2, x \geq 0, y \geq 0$$

という有限の領域で重積分を求め、 $R$  を無限大にもっていくことで、 $D$  の領域での重積分を求めます。 $D_R$  を極座標で表すと、

$$D'_R : 0 \leq r \leq R, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$$



となります。極座標による重積分の公式を用いて、

$$\begin{aligned} \iint_{D_R} e^{-(x^2+y^2)} dx dy &= \iint_{D'_R} e^{-r^2} r dr d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^R e^{-r^2} r dr d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[ -\frac{1}{2} e^{-r^2} \right]_0^R d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} (1 - e^{-R^2}) d\theta \\ &= \left[ \frac{1}{2} (1 - e^{-R^2}) \theta \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4} (1 - e^{-R^2}) \end{aligned}$$

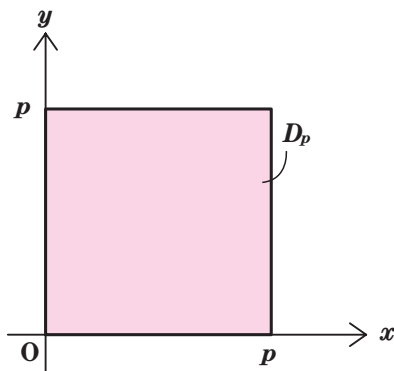
$R \rightarrow +\infty$  のとき、 $\frac{\pi}{4} (1 - e^{-R^2}) \rightarrow \frac{\pi}{4}$  ですから、

$$\iint_D e^{-(x^2+y^2)} dx dy = \frac{\pi}{4}$$

(2) (1)の重積分は、有限の領域

$$D_p : 0 \leq x \leq p, 0 \leq y \leq p$$

で重積分を計算し、 $p \rightarrow \infty$  としても求めることができます。



$$\begin{aligned} \iint_{D_p} e^{-(x^2+y^2)} dx dy &= \int_0^p \int_0^p e^{-x^2} \cdot e^{-y^2} dx dy \\ &= \left( \int_0^p e^{-x^2} dx \right) \left( \int_0^p e^{-y^2} dy \right) = \left( \int_0^p e^{-x^2} dx \right)^2 \end{aligned}$$

であり、 $p \rightarrow \infty$  のとき、 $\left( \int_0^p e^{-x^2} dx \right)^2 \rightarrow \frac{\pi}{4}$  より、 $\left( \int_0^\infty e^{-x^2} dx \right)^2 = \frac{\pi}{4}$

$$\int_0^\infty e^{-x^2} dx > 0 \text{ なので、} \int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

この定積分の値は確率論を学習するときにポイントとなってきます。

確率分布の中で一番重要な分布である正規分布  $N(\mu, \sigma)$  の確率密度関数は、

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

です。 $f(x)$ が、 $\int_{-\infty}^\infty f(x) dx = 1$  を満たすことを確認するときに、この定積分の値を用います。