偶関数の広義積分（講義編 p.192、別 p.32、p.34 の補足）

$f(x)$を $-\infty$ から ∞ まで定積分するときは、次のように計算します。

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \lim_{b\to-\infty}\lim_{a\to\infty}\int_b^a f(x)dx \quad \cdots\cdots①$$

ですから、$f(x)=\sin x$ とすると、

$$\int_{-\infty}^{\infty} \sin x dx = \lim_{b\to-\infty}\lim_{a\to\infty}\int_b^a \sin x dx = \lim_{b\to-\infty}\lim_{a\to\infty}(-\cos a+\cos b)$$

となり、この定積分は計算できません。この定積分を

$$\int_{-\infty}^{\infty} \sin x dx = \lim_{a\to\infty}\int_{-a}^{a} \sin x dx = \lim_{a\to\infty}(-\cos a+\cos(-a))=0$$

とするのは誤りです。しかし、$f(x)$が偶関数（$f(x)=f(-x)$を満たす）のときは、

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \lim_{a\to\infty}\int_{-a}^{a} f(x)dx$$

が成り立ちます。

［理由］

$f(x)$が偶関数であることの定義は、任意の x について、

$$f(-x)=f(x)$$

です。$f(x)$が偶関数のとき、$t=-x$ として、

$$\int_{-c}^{0} f(x)dx = \int_{c}^{0} f(-t)(-dt) = \int_0^c f(x)dx \quad \cdots②$$

これを用いると、

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \lim_{c\to\infty}\lim_{d\to-\infty}\int_d^c f(x)dx$$

$$= \lim_{c\to\infty}\lim_{d\to-\infty}\left(\int_0^c f(x)dx + \int_d^0 f(x)dx\right)$$

$$= \lim_{c\to\infty}\left(\int_0^c f(x)dx + \lim_{d\to-\infty}\int_d^0 f(x)dx\right)$$

$$= \lim_{c\to\infty}\int_0^c f(x)dx + \lim_{d\to-\infty}\int_d^0 f(x)dx$$

$$=\lim_{c\to\infty}\int_0^c f(x)\,dx+\lim_{d\to-\infty}\int_0^{-d} f(x)\,dx$$ ②を用いた

$$=\lim_{c\to\infty}\int_0^c f(x)\,dx+\lim_{c\to\infty}\int_0^c f(x)\,dx$$

$$=\lim_{c\to\infty}2\int_0^c f(x)\,dx$$

$$=\lim_{c\to\infty}\left(\int_0^c f(x)\,dx+\int_0^c f(x)\,dx\right)$$

$$=\lim_{c\to\infty}\left(\int_0^c f(x)\,dx+\int_{-c}^0 f(x)\,dx\right)$$ ②を用いた

$$=\lim_{c\to\infty}\int_{-c}^c f(x)\,dx$$