$x^{\alpha}\times$ 有理関数（α は整数ではない）の定積分（講義編 p.278 の補足）

ここでは一般の形 $\dfrac{P(x)}{Q(x)}x^{\alpha}$ で考察して公式化してみましょう。

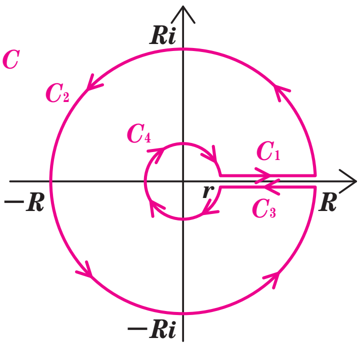
$f(z)=\dfrac{P(z)}{Q(z)}z^{\alpha}$ を先ほどと同じ経路 C で周回積分します。$\dfrac{P(z)}{Q(z)}$ は正の実数で特異点を持たない（$Q(x)=0$ の解は正の実数ではない）ものとします。

C_1：$z=x$　（$r\leqq x\leqq R$）

C_2：$z=Re^{i\theta}$　（$0\leqq\theta\leqq 2\pi$）

C_3：$z=x$　（$r\leqq x\leqq R$）

C_4：$z=re^{i\theta}$　（$0\leqq\theta\leqq 2\pi$）



$$\oint_C \frac{P(z)}{Q(z)}z^{\alpha}dz$$

$$=\int_{C_1}\frac{P(z)}{Q(z)}z^{\alpha}dz+\int_{C_2}\frac{P(z)}{Q(z)}z^{\alpha}dz+\int_{C_3}\frac{P(z)}{Q(z)}z^{\alpha}dz+\int_{C_4}\frac{P(z)}{Q(z)}z^{\alpha}dz\cdots\cdots\cdots①$$

ここで注意すべき点は、$z^{\alpha}=e^{\alpha\log z}$ であり、z^{α} は $\log z$ を用いて表されることから、z^{α} が多価関数になっている点でした。

$\log z$ については、z の偏角を $0\leqq\arg z<2\pi$ として取り、

$$\log z=\log|z|+i\arg z$$

とします。

C_2：$z=Re^{i\theta}$ の式では $\theta=0$ と $\theta=2\pi$ を代入すると同じ値 R をとりますが、z に対応する $\log z$ は、

$$\log z=\log(Re^{i\theta})=\log|Re^{i\theta}|+i\arg(Re^{i\theta})=\log R+i\theta$$

ですから、C_2 の始点 $\theta=0$ では $\log z=\log R$、終点 $\theta=2\pi$ では $\log z=\log R+2\pi i$ となります。

ですから、C_2 上での $f(z)$ の値は、

$$f(Re^{i\theta})=\frac{P(Re^{i\theta})}{Q(Re^{i\theta})}e^{\alpha(\log R+i\theta)}$$

C_2 の始点(C_1 の終点)$\theta=0$ のとき、$\dfrac{P(R)}{Q(R)}e^{\alpha\log R}$

C_2 の終点(C_3 の始点)$\theta=2\pi$ のとき、$\dfrac{P(R)}{Q(R)}e^{\alpha\log R+2\pi\alpha i}$

となります。C_1 の終点と C_3 の始点は同じ位置に見えますが、リーマン面上では異なる点なのでした。

C_1 上の線積分は、

$$\int_{C_1}\frac{P(z)}{Q(z)}z^{\alpha}dz=\int_r^R\frac{P(x)}{Q(x)}e^{\alpha\log x}dx=\int_r^R\frac{P(x)}{Q(x)}x^{\alpha}dx$$

となりますが、C_3 上の線積分は

$$\int_{C_3}\frac{P(z)}{Q(z)}z^{\alpha}dz=\int_R^r\frac{P(x)}{Q(x)}e^{\alpha\log x+2\pi\alpha i}dx$$

$$=-e^{2\pi\alpha i}\int_r^R\frac{P(x)}{Q(x)}e^{\alpha\log x}dx=-e^{2\pi\alpha i}\int_r^R\frac{P(x)}{Q(x)}x^{\alpha}dx$$

と、C_1 上の線積分の $-e^{2\pi\alpha i}$ 倍になるのです。

$$\int_{C_1}\frac{P(z)}{Q(z)}z^{\alpha}dz+\int_{C_3}\frac{P(z)}{Q(z)}z^{\alpha}dz=(1-e^{2\pi\alpha i})\int_r^R\frac{P(x)}{Q(x)}x^{\alpha}dx$$

$r\to+0$、$R\to\infty$ のとき、C_2、C_4 の線積分が 0 に収束するのであれば、①は

$$\oint_C\frac{P(z)}{Q(z)}z^{\alpha}dz=(1-e^{2\pi\alpha i})\int_0^{\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}x^{\alpha}dx$$

$Q(z)=0$ が正の実数解を持たないので、$r\to+0$、$R\to\infty$ のとき、$\dfrac{P(z)}{Q(z)}$のすべての極、すなわち $Q(x)$の零点が C で囲まれる領域に含まれます。よって、$R\to\infty$、$r\to+0$ のとき、①は左辺に留数定理を用いて、

$$2\pi i\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Res}\left(\frac{P(z)}{Q(z)}z^{\alpha},\ a_k\right)=(1-e^{2\pi\alpha i})\int_0^{\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}x^{\alpha}dx$$

$$\int_0^{\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}x^{\alpha}dx=\frac{2\pi i}{1-e^{2\pi\alpha i}}\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Res}\left(\frac{P(z)}{Q(z)}z^{\alpha},\ a_k\right)$$

と定積分が求まります。

ここで $r\to+0$、$R\to\infty$ のとき、C_2、C_4 の線積分が 0 に収束するように、α、$P(x)$、$Q(x)$ に条件を付けます。

（i） $0<\alpha<1$

（ii） $\deg P(x)+2\leqq\deg Q(x)$

（iii） $Q(x)=0$ は $x=0$ を重解に持たない

$R\to\infty$ のとき、C_2 の線積分が 0 に収束することを示しましょう。定理 1.13 (2) を用いると、（ii）の条件から、R が十分大きいところでは、

$$\left|\frac{P(Re^{i\theta})}{Q(Re^{i\theta})}\right|\leqq\frac{M}{R^2}$$

を満たすような定数 M が存在します。これを用いて、

$$\left|\int_{C_2}\frac{P(z)}{Q(z)}z^{\alpha}dz\right|\leqq\int_{C_2}\left|\frac{P(z)}{Q(z)}\right||z^{\alpha}||dz|$$

$$=\int_0^{2\pi}\left|\frac{P(Re^{i\theta})}{Q(Re^{i\theta})}\right||R^{\alpha}e^{i\alpha\theta}||iRe^{i\theta}d\theta|\leqq\frac{2\pi M}{R^2}R^{\alpha+1}=\frac{2\pi M}{R^{1-\alpha}}$$

となります。$1-\alpha>0$ から、$R\to\infty$ のとき右辺は 0 に収束し、C_2 の線積分も 0 に収束します。

$r\to+0$ のとき、C_4 の線積分が 0 に収束することを示しましょう。（iii）の条件より $Q(x)$ は $b_0+b_1x+\cdots+b_nx^n$ または $x(b_0+b_1x+\cdots+b_{n-1}x^{n-1})$ $(b_0\neq0)$ と表されますから、r が十分小さいところでは、

$$\left|\frac{P(re^{i\theta})}{Q(re^{i\theta})}\right|\leqq\frac{M}{r}$$

詳細は各自で

を満たすような定数 M が存在します。これを用いて、

$$\left|\int_{C_4}\frac{P(z)}{Q(z)}z^{\alpha}dz\right|\leqq\int_{C_4}\left|\frac{P(z)}{Q(z)}\right||z^{\alpha}||dz|$$

$$=\int_0^{2\pi}\left|\frac{P(re^{i\theta})}{Q(re^{i\theta})}\right||r^\alpha e^{i\alpha\theta}||ire^{i\theta}d\theta|\leqq\frac{2\pi M}{r}r^{\alpha+1}=2\pi Mr^\alpha$$

となります。$\alpha>0$ から、$r\to+0$ のとき C_4 の線積分が 0 に収束します。

まとめておくと次のようになります。

定理 5.15　有理関数 ×x^α の（0，∞）での定積分

$0<\alpha<1$ のとき、

$$\int_0^\infty\frac{P(x)}{Q(x)}x^\alpha dx=\frac{2\pi i}{1-e^{2\pi\alpha i}}\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Res}\left(\frac{P(z)}{Q(z)}z^\alpha,\ a_k\right)$$

ただし、$P(x)$、$Q(x)$は x の多項式で、$\deg P(x)+2\leqq\deg Q(x)$を満たすとする。

$Q(x)$の零点は a_1、a_2、…、a_n で、これらの中に正の実数はない。また、$Q(x)=0$ は $x=0$ を重解として持たない。