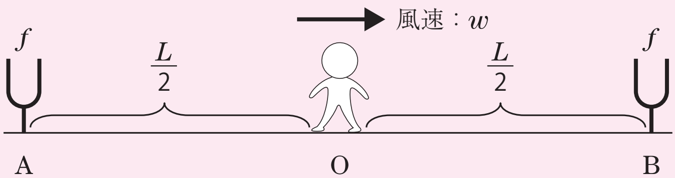
応用問題

次の図のように、直線上に振動数fの同位相の音源A、Bがあり、L離れている。A、Bの中点Oに観測者が立っており音源A、Bからの音波を観測している。音速をVとして、次の問いに答えよ。



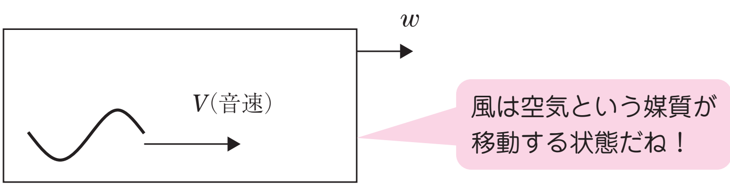
(1)　AからOに伝わる音波の波長 λ_A、BからOに伝わる音波の波長λ_Bを求めよ。

(2)　点Oでの音波の位相差を求めよ。

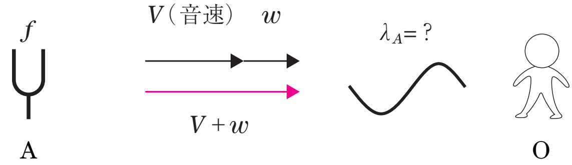
(3)　点Oで音波が弱め合う、風速の最小値を求めよ。

解答

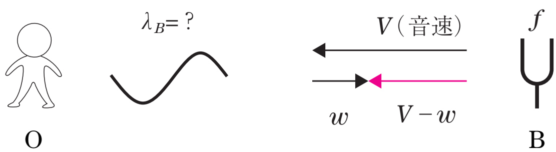
(1)　風速wの風とは、空気という媒質が速さwで移動している状態だね。よって、音速は空気に対する音波の速度Vと風の速度wの合成速度を考えればよい。



Aから Oに伝わる音速は、次の図のように速度の合成を考えると、$V+w$となるね！



BからOに伝わる音速は、次の図のように、音速と風の方向が画逆向きなので、合成速度は$V-w$となるね。



波の基本公式：$V=f\lambda$を利用して、λ_A、λ_Bを計算しよう。

$V+w=f\lambda_A$、$\lambda_A=\dfrac{V+w}{f}$ …… 答

$V-w=f\lambda_B$、$\lambda_B=\dfrac{V-w}{f}$

(2)(3)　干渉の条件といえば、距離の差$\varDelta$と波長λを用いた次の式を利用したい。

距離差：$\varDelta=\dfrac{\lambda}{2}\times\begin{cases}2m & \text{（偶数）：強め合う}\\ 2m+1 & \text{（奇数）：弱め合う}\end{cases}$

ところが、この問題は距離の差$\varDelta$が0だよね！？　また、AからOに伝わる波長と、BからOに伝わる波長が異なるので、半波長$\dfrac{\lambda}{2}$のλをどう扱えばいいの？？って思うよねえ……

位相を用いた干渉の条件って時々入試に登場するので、注意が必要だ。そこでまず、**位相差を用いた干渉の条件**を次に示すよ。

次のように位相がϕ異なる2つの単振動：y_1、y_2がある。

$y_1=A\sin\omega t$

$$y_2 = A\sin(\omega t + \phi)$$

これらの単振動の合成の変位Yを考える。

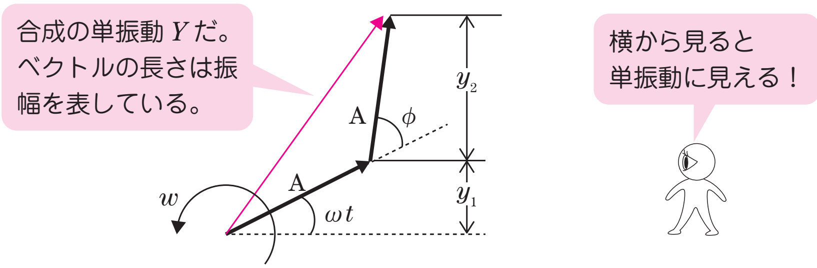
$$Y = y_1 + y_2$$

合成の単振動Yが強め合う（振幅max）条件、弱め合う（振幅min）条件を位相差ϕを用いて、どのように表すことができるかな？

三角関数の加法定理を用いて、Yを計算してもいいが、ちょっと面倒だね。そこで……

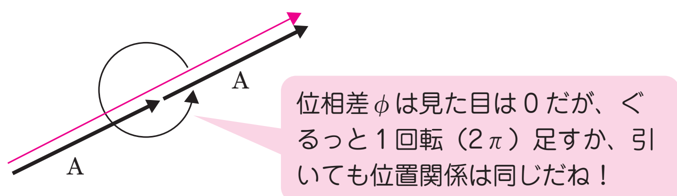
次の図のように、角速度ωで回転している長さAのベクトルを考えてみよう。横からながめたベクトルの変位が、単振動$y_1 = A\sin\omega t$を表しているよね。これは第1部第13章の交流でも登場した方法だ。

位相がϕずれた単振動の合成変位：$Y = y_1 + y_2$は、角度がϕ異なるベクトルの和を考えてみよう！　このベクトルの和が合成変位を表し、ベクトルの長さが振幅だ。



強め合いの条件

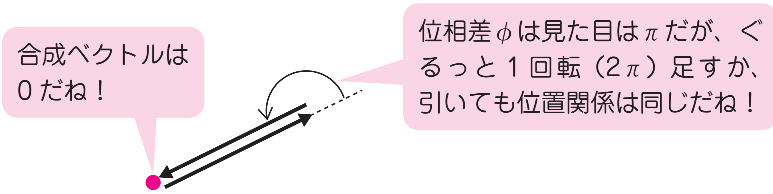
ベクトルの和が最も長くなる条件を考えてみよう。もちろん次の図のように、2つのベクトルが同じ方向を向いている場合に合成されたベクトルの長さがmaxとなるよね。



強め合いの条件　位相差：$\phi = 0 + 2\pi m$（mは整数）

弱め合いの条件

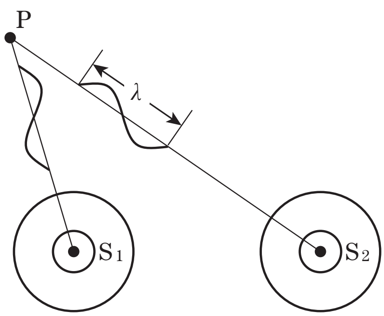
ベクトルの和が、最も短くなる条件を考えてみよう。次の図のように、2つのベクトルが逆向きの場合、合成されたベクトルの長さがminとなるよね。



弱め合いの条件　位相差：$\phi = \pi + 2\pi m$（mは整数）

次に**距離の差を用いた干渉の条件**を、位相差の考えから導いてみよう。

次の図のように、水面上に**同位相（同じ振動）**の2つの波源S_1、S_2があり、波長λの円形波が送り出されているとしよう。水面上の適当な1つの点Pに注目すると、S_1、S_2から届いた振動が重なっている。点Pでの干渉の条件を考える。



S_1、S_2：同位相の波源

まず、2つの波が進む**距離差：$|S_1P-S_2P|=\Delta$**に注目する。距離差$\Delta=0$ならば、点Pでの位相差ϕはもちろん0だよね。では、距離差Δに対する位相差ϕはいくらか？

波長λの長さを位相で表すと、サインカーブの1周期分(2π)だ！

波長λ⇒位相で表すと2π

距離差$\varDelta$に対する位相差ϕと、波長λに対する位相差2πとの比を考えると、次のように計算できる。

$$\frac{\varDelta}{\lambda}=\frac{\phi}{2\pi}$$

上式を位相差ϕについて、求めると次のようになる。

位相差：$\phi=2\pi\dfrac{\varDelta}{\lambda}$(距離差$\varDelta$を位相差で表した式だよ)

位相差を用いた干渉条件を当てはめると、次のように表すことができる。

$$\phi=2\pi\frac{\varDelta}{\lambda}=\begin{cases}0+2\pi m：\text{強め合う}\\ \pi+2\pi m：\text{弱め合う}\end{cases}$$

上式を距離差$\varDelta$について求めると、次のようになる。

$$\text{距離差}：\varDelta=\frac{\lambda}{2}\times\begin{cases}2m\quad(\text{偶数})：\text{強め合う}\\ 2m+1(\text{奇数})：\text{弱め合う}\end{cases}$$

では、距離差$\varDelta$を位相差$\phi=2\pi\dfrac{\varDelta}{\lambda}$で表されることをもとに、(2)(3)を改めて考えてみよう。

(2)　AからOに伝わった波の距離$\dfrac{L}{2}$に対する位相をθ_A、BからOに伝わった波の距離$\dfrac{L}{2}$に対する位相をθ_Bとする。

$$\theta_A=2\pi\frac{L/2}{\lambda_A}$$

上式に$\lambda_A=\dfrac{V+w}{f}$を代入しθ_Aを計算する。

$$\theta_A=\pi L\frac{f}{V+w}\quad\cdots\cdots①$$

$$\theta_B = 2\pi\frac{L/2}{\lambda_B}$$

上式に $\lambda_B = \dfrac{V-w}{f}$ を代入し、θ_Bを計算する。

$$\theta_B = \pi L\frac{f}{V-w} \quad \cdots\cdots ②$$

点Oにおける位相差 ϕ は θ_Aと θ_Bの差だね。

$\theta_A < \theta_B$より、$\phi = \theta_B - \theta_A$

ϕ の式に①、②を代入。

$$\phi = \pi L\frac{f}{V-w} - \pi L\frac{f}{V+w}$$

$$= \pi Lf\frac{2w}{(V-w)(V+w)}$$

位相差：$\phi = \dfrac{2\pi Lfw}{V^2-w^2}$ ……答

(3)　点Oで弱め合う条件を位相差 ϕ で表すと、$\phi = \pi + 2\pi m$だね。(2)で求めた位相差：$\phi = \dfrac{2\pi Lfw}{V^2-w^2}$は、風速$w$が大きいほど、大きくなるよね。

問題では、風速wの最小値が知りたいのだから、ϕ の最小値 π であればいい。

点Oでの位相差：$\phi = \dfrac{2\pi Lfw}{V^2-w^2} = \pi$

上式を風速wについて計算しよう。

$2Lfw = V^2 - w^2$

$w^2 + 2Lfw - V^2 = 0$

2次方程式の解の公式より、

$w = -Lf \pm \sqrt{(Lf)^2 + V^2}$

$w > 0$より、

$w = -Lf + \sqrt{(Lf)^2 + V^2}$ ……答

チョットレベルの高い話だったけど、位相差を利用した干渉の条件は、

しっかり身に付けようね！