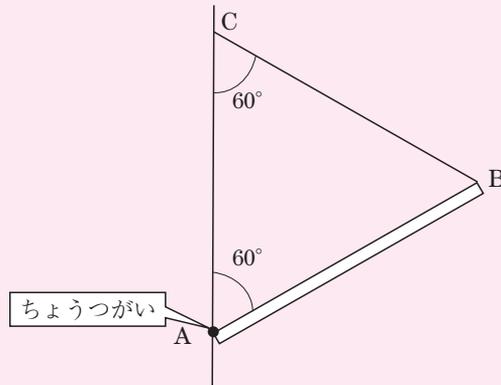


応用問題

図のように、質量 m の細い一様な棒ABの一端Aを、鉛直な壁に固定されたちょうつがい（ちょうつがい）に留め、端Bには糸をつなぎ、糸を点Cで壁に固定した。棒ABと糸BCを壁に対して 60° に保つ。重力加速度を g として次の問いに答えよ。

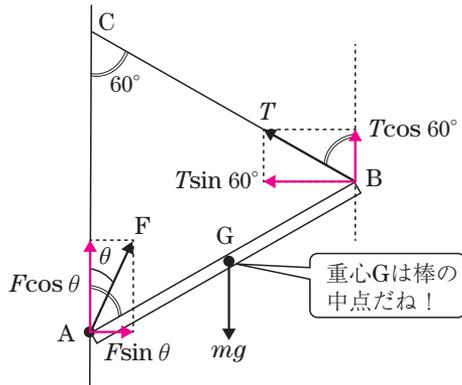


- (1) 糸の張力の大きさ T を求めよ。
- (2) 棒が、ちょうつがいから受ける力の大きさ F を求めよ。
- (3) ちょうつがいから受ける力 F が、壁となす角度 θ を求めよ。

解答

■ 普通の解答

問題文に「一様な棒」とあるので重心 G は棒の midpoint だね。棒に働く力は次の図のように、重心 G に働く重力 mg 、糸の張力 T 、ちょうつがいから受ける力 F だ。

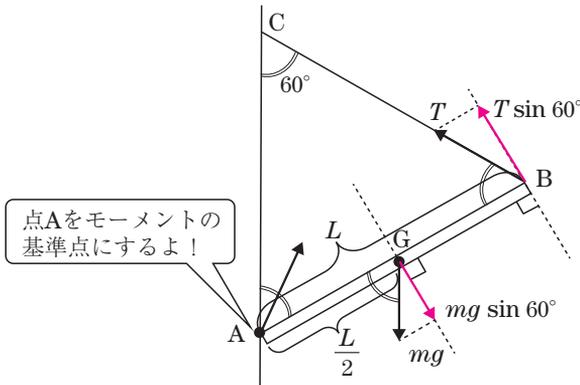


力を鉛直、水平の2方向に分解して力のつり合いを式で表す。

水平方向： $F \sin \theta = T \sin 60^\circ \dots\dots ①$

鉛直方向： $F \cos \theta + T \cos 60^\circ = mg \dots\dots ②$

次にモーメントのつり合いを考えよう。点Aをモーメントの基準として、力のモーメントのつり合いを考えよう。力Fのモーメントは0だね。



$L \cdot T \sin 60^\circ = \frac{L}{2} mg \sin 60^\circ$ よって、 $T = \frac{1}{2} mg \dots\dots$ **答** (1)

この結果を、つりあいの式①、②に代入する。

①より、 $F \sin \theta = \frac{1}{2} mg \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{4} mg$

②より、 $F \cos \theta + \frac{1}{2} mg \cos 60^\circ = mg$ 、 $F \cos \theta = \frac{3}{4} mg$

$F^2 = (F \sin \theta)^2 + (F \cos \theta)^2$ より、

$$F^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{4}mg\right)^2 + \left(\frac{3}{4}mg\right)^2 = \frac{3}{4}(mg)^2$$

$$F = \frac{\sqrt{3}}{4}mg \quad \dots\dots \text{答(2)}$$

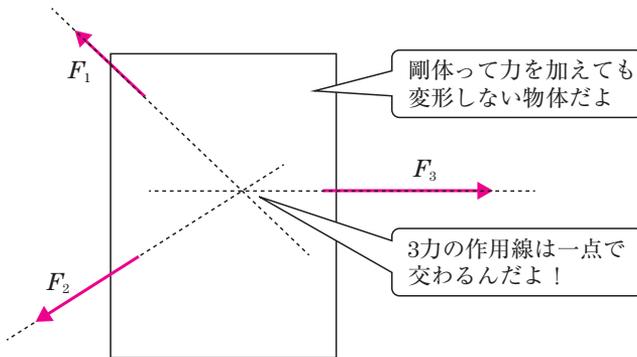
$$\tan \theta = \frac{F \sin \theta}{F \cos \theta} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{4}mg}{\frac{3}{4}mg} = \frac{\sqrt{3}}{3}, \text{ よって } \theta = 30^\circ \quad \dots\dots \text{答(3)}$$

■ 超速解法

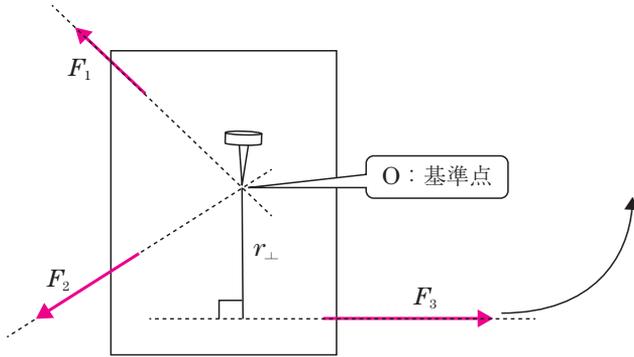
次の原理を用いると、ちょうつがいから受ける力 F の方向は一瞬で決まるよ！

重要

平行ではない F_1, F_2, F_3 の3力が剛体にはたらく場合、作用線は必ず一点で交わる。

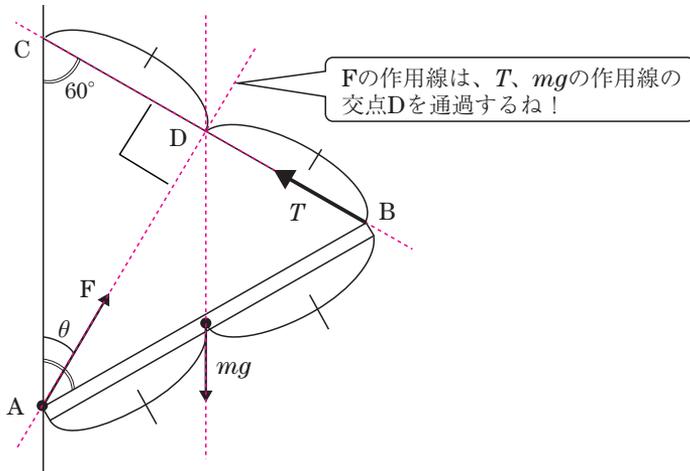


(証明) F_1, F_2 の作用線が交わる点をモーメントの基準点: O とし、 F_3 の作用線が基準点 O から外れていたとしよう。基準点 O のまわりにおいて、 F_1, F_2 は、腕の長さが0なのでモーメントは0。ところが F_3 の腕の長さ r_{\perp} が0でないため、剛体は回転する。回転しないためには F_3 の腕の長さ r_{\perp} は0でなければならないので**3力の作用線は一点で交わる**。



では改めて問題を考えよう。まず、重力 mg 、張力 T の作用線を描き、交点を D とする。 mg の作用線は辺 AC に平行なので、「中点連結定理」より、点 D は辺 BC の中点だね。

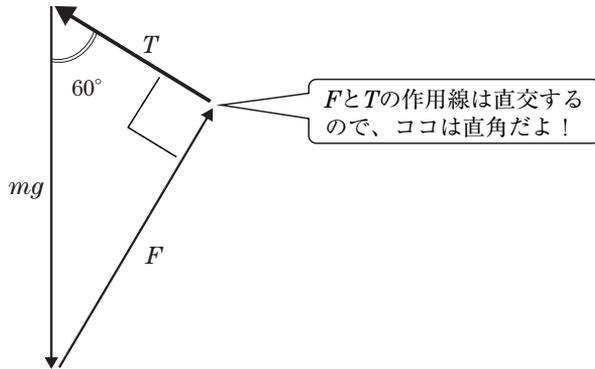
F の作用線は、「3力の作用線は一点で交わる」の原理から、交点 D を通過する！ ということは、 AD は辺 BC の垂直二等分となっている。



三角形 ADC は直角三角形なので、 $\theta + 60^\circ = 90^\circ$ だね。

よって、 $\theta = 30^\circ$ ……**答**(3)

次に力のつり合いを考えてみよう。力のつり合いで学んだように、**3力のつり合いは、ベクトル和で3角形を描くのが有効!** だね。



上図の直角三角形の三辺の比を考えると、次の関係が成り立つ。

$$T : mg : F = 1 : 2 : \sqrt{3}$$

よって、 $T = \frac{1}{2}mg$ 、 $F = \frac{\sqrt{3}}{2}mg$ …… 答(1)(2)